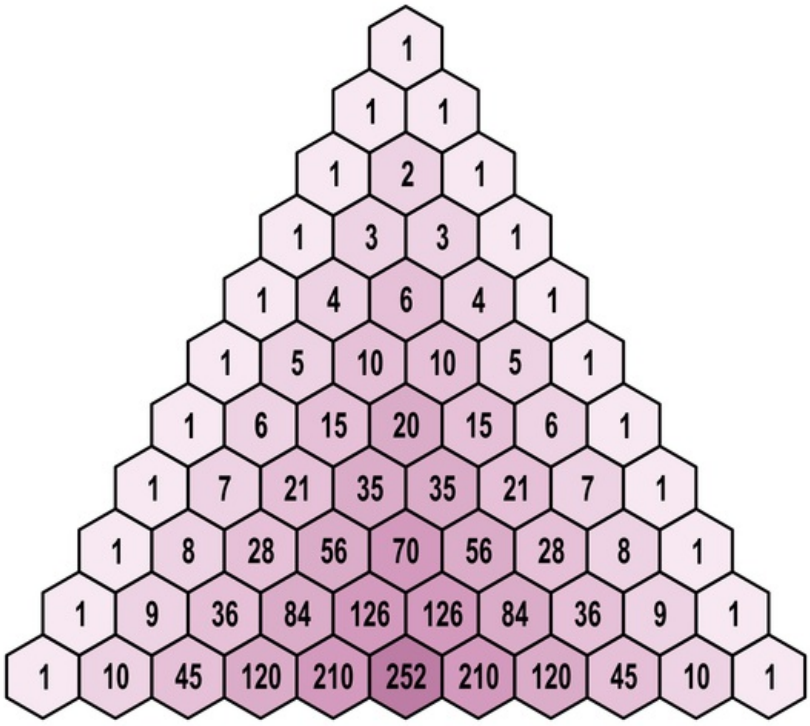
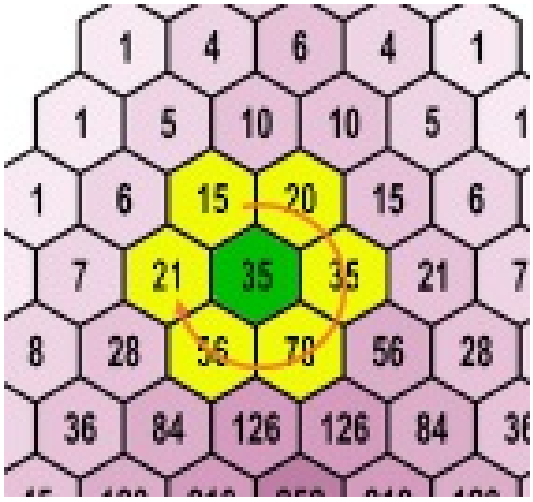
A square triangle

You may have heard of **Pascal's triangle** before. A triangular array that is constructed in the following way. At the top of the triangle you write the number 1. Each next row of the triangle is constructed by adding the two numbers above each cell in the row to find the new value in that cell. If either the number to the top right or top left is not present, substitute a zero in its place. Below we demonstrate how the first eleven rows of the triangle are constructed.



The first eleven rows of Pascal's triangle.

A remarkable feature of Pascal's triangle is that the **product** of the six numbers surrounding any interior position (a position not on the edge of the triangle) is a **perfect square** (a square of an integer number).



The product of the six numbers surrounding any interior position in Pascal's triangle is a perfect square.

If we test this property for the number 35 on row 8 and column 4 in Pascal's triangle, we get $$15 \times 20 \times 35 \times 70 \times 56 \times 21 = 864360000 = 29400 \times 29400$$

Assignment

Test the above feature of Pascal's triangle. To reference the positions in Pascal's triangle we index the rows from top to bottom, and the columns on each row from left to right, each time starting at 1. You are asked to:

- Write a function `triangle` that takes a number $r \in \mathbb{N}$. The function must return the first r rows of Pascal's triangle, represented as a list of its rows from top to bottom. Each row is itself represented as a list of the numbers on that row from left to right. If the argument passed to the function is not a natural number, the function must raise an `AssertionError` with the message `invalid number of rows`.
- Write a function `hexagon` that takes the row and column index of an internal position in Pascal's triangle. The function must return a list containing the six numbers surrounding that internal position, listed clockwise starting from the number to the top left of the given internal position.
- Write a function `square` that takes the row and column index of an internal position in Pascal's triangle. The function must return a string that is formatted as *factors* = *product* = *root* x *root*, where *factors* is an expression representing the product of the six numbers surrounding the given internal position (listed in the same order as returned by the function `hexagon`, using `x` as the multiplication operator), *product* is the product of these six numbers, and *root* is the square root of this product expressed as an integer. Take a look at the examples below to see how the result needs to be formatted.

If the arguments passed to the functions `hexagon` and `square` do not represent an internal position in Pascal's triangle, both functions must raise an `AssertionError` with the message `invalid internal position`.

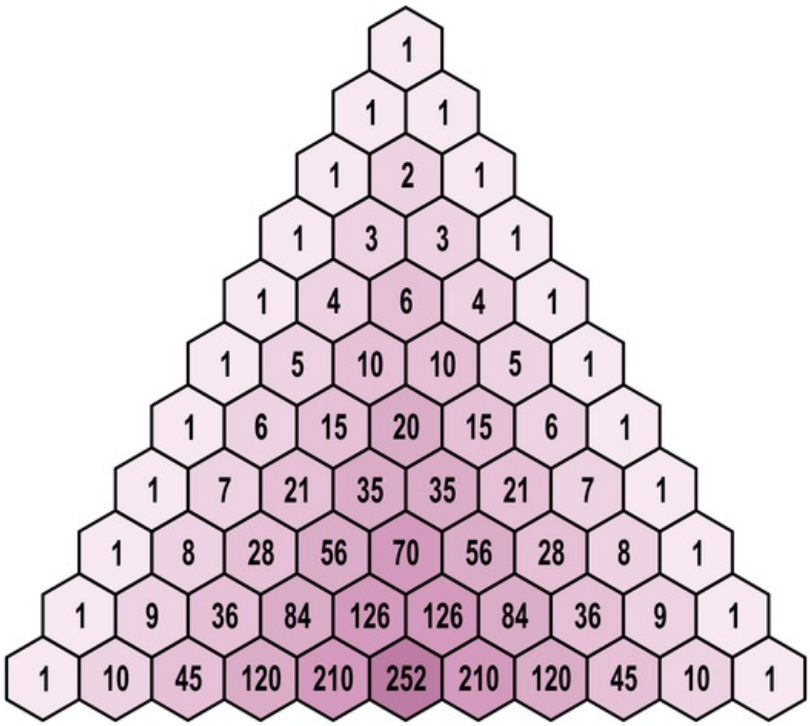
Example

```
>>> triangle(0)
[]
>>> triangle(1)
[[1]]
>>> triangle(2)
[[1], [1, 1]]
>>> triangle(3)
[[1], [1, 1], [1, 2, 1]]
>>> triangle(4)
[[1], [1, 1], [1, 2, 1], [1, 3, 3, 1]]
>>> triangle(5)
[[1], [1, 1], [1, 2, 1], [1, 3, 3, 1], [1, 4, 6, 4, 1]]
>>> triangle(-1)
Traceback (most recent call last):
AssertionError: invalid number of rows
>>> triangle(3.14)
Traceback (most recent call last):
AssertionError: invalid number of rows

>>> hexagon(8, 4)
[15, 20, 35, 70, 56, 21]
>>> hexagon(16, 7)
[2002, 3003, 6435, 11440, 8008, 3003]
>>> hexagon(3, 3)
Traceback (most recent call last):
AssertionError: invalid internal position
```

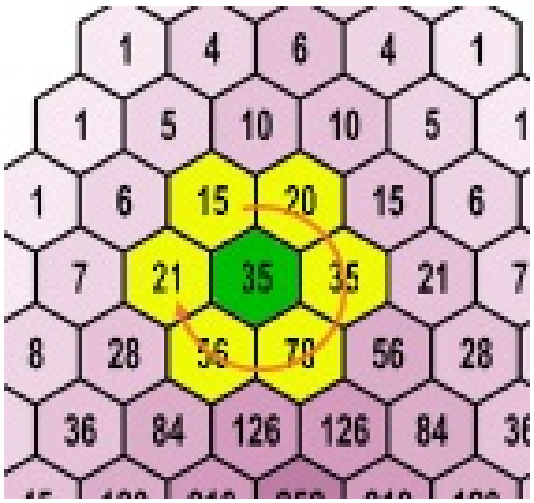
```
>>> square(8, 4)
'15 x 20 x 35 x 70 x 56 x 21 = 864360000 = 29400 x 29400'
>>> square(16, 7)
'2002 x 3003 x 6435 x 11440 x 8008 x 3003 = 10643228293383247161600 = 103166022960 x 103166022960'
>>> square(3, 3)
Traceback (most recent call last):
AssertionError: invalid internal position
```

Waarschijnlijk heb je ooit wel al eens gehoord van de **driehoek van Pascal**. Deze driehoek wordt op de volgende manier opgebouwd. Helemaal bovenaan schrijf je het getal 1. De volgende rij van de driehoek wordt telkens gevormd door op elke positie de som van de twee bovenliggende getallen te schrijven. Indien het getal linksboven of rechtsboven ontbreekt, dan vervang je het door een denkbeeldige nul. Hieronder tonen we alvast hoe de eerste elf rijen van de driehoek opgebouwd worden.



De eerste elf rijen van de driehoek van Pascal.

Een merkwaardige eigenschap van de driehoek van Pascal is dat het **product** van de zes getallen rondom een interne positie (een positie niet op de rand van de driehoek) altijd een **volkomen kwadraat** (een kwadraat van een natuurlijk getal) oplevert.



In de driehoek van Pascal levert het product van de zes getallen rondom een interne positie altijd een volkomen kwadraat op.

Als we dit eens uittesten voor het getal 35 op rij 8 en kolom 4 in de driehoek van Pascal, dan vinden we dat $$15 \times 20 \times 35 \times 70 \times 56 \times 21 = 864360000 = 29400 \times 29400$$

Opgave

Je opdracht bestaat erin te testen of de bovenvermelde eigenschap van de driehoek van Pascal wel degelijk geldt. Om posities in de driehoek van Pascal aan te duiden, nummeren we de rijen van de driehoek van boven naar onder, en nummeren we de kolommen op elke rij van links naar rechts, telkens vanaf 1. Gevraagd wordt:

- Schrijf een functie `driehoek` waaraan een getal $r \in \mathbb{N}$ moet doorgegeven worden. De functie moet de eerste r rijen van de driehoek van Pascal teruggeven, voorgesteld als een lijst met de rijen van boven naar onder. Elke rij wordt zelf ook voorgesteld door een lijst met de getallen op die rij van links naar rechts. Indien het argument dat aan de functie wordt doorgegeven geen natuurlijk getal is, dan moet de functie een `AssertionError` opwerpen met de boodschap `ongeldig aantal rijen`.
- Schrijf een functie `zeshoek` waaraan de rij- en kolomindex van een interne positie in de driehoek van Pascal moet doorgegeven worden. De functie moet een lijst teruggeven met de zes getallen rondom de gegeven interne positie, opgelijst in wijzerzin te beginnen vanaf het getal linksboven de gegeven interne positie.
- Schrijf een functie `kwadraat` waaraan de rij- en kolomindex van een interne positie in de driehoek van Pascal moet doorgegeven worden. De functie moet een string teruggeven van de vorm *factoren* = *product* = *wortel* x *wortel*, waarbij *factoren* het uitgeschreven product is van de zes getallen rondom de gegeven interne positie (in dezelfde volgorde zoals die door de functie `zeshoek` worden teruggegeven, met `x` als de operator voor de vermenigvuldiging), *product* het product is van deze zes getallen, en *wortel* de vierkantswortel is van dit product dat als natuurlijk getal wordt weergegeven. Bekijk onderstaande voorbeelden om te zien hoe het resultaat precies moet opgemaakt worden.

Indien de argumenten die aan de functies `zeshoek` en `kwadraat` worden doorgegeven geen interne positie van de driehoek voorstellen, dan moeten beide functies een `AssertionError` opwerpen met de boodschap `ongeldige interne positie`.

Voorbeeld

```
>>> driehoek(0)
[]
>>> driehoek(1)
[[1]]
>>> driehoek(2)
[[1], [1, 1]]
>>> driehoek(3)
[[1], [1, 1], [1, 2, 1]]
>>> driehoek(4)
[[1], [1, 1], [1, 2, 1], [1, 3, 3, 1]]
>>> driehoek(5)
[[1], [1, 1], [1, 2, 1], [1, 3, 3, 1], [1, 4, 6, 4, 1]]
>>> driehoek(-1)
```

```
Traceback (most recent call last):
AssertionError: ongeldig aantal rijen
>>> driehoek(3.14)
Traceback (most recent call last):
AssertionError: ongeldig aantal rijen

>>> zeshoek(8, 4)
[15, 20, 35, 70, 56, 21]
>>> zeshoek(16, 7)
[2002, 3003, 6435, 11440, 8008, 3003]
>>> zeshoek(3, 3)
Traceback (most recent call last):
AssertionError: ongeldige interne positie

>>> kwadraat(8, 4)
'15 x 20 x 35 x 70 x 56 x 21 = 864360000 = 29400 x 29400'
>>> kwadraat(16, 7)
'2002 x 3003 x 6435 x 11440 x 8008 x 3003 = 10643228293383247161600 = 103166022960 x 103166022960'
>>> kwadraat(3, 3)
Traceback (most recent call last):
AssertionError: ongeldige interne positie
```